

Espressione operatoriale:  $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$L_x = y \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_y = z \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$L_z = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Richiamo: operatori con stessi autostati

1] commutano;

2] corrispondono a grandezze simultaneamente misurabili.

Le componenti del momento angolare **non commutano**.

Si ottiene facilmente (con molta algebra):

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

Non è possibile misurare simultaneamente due componenti di  $\mathbf{L}$ .

Il quadrato del momento angolare totale e una qualunque componente di  $\mathbf{L}$  **commutano**:

$$[L^2, L_{x,y,z}] = 0$$

È possibile misurare simultaneamente  $L^2$  e una componente di  $\mathbf{L}$ .

## Momento angolare: autovalori.

È possibile misurare simultaneamente  $L^2$  e una componente di  $\mathbf{L}$ .

Le autofunzioni simultanee di  $L^2$  e  $L_z$  sono le *armoniche sferiche*:  $Y_l^m(\theta, \phi)$

Le equazioni agli autovalori forniscono autovalori quantizzati:

$$\mathbf{L}^2 \psi = l(l+1)\hbar^2 \psi \quad \begin{array}{l} l \text{ è intero per le armoniche sferiche;} \\ \text{sono ammessi formalmente anche valori semiinteri} \end{array}$$

$$L_z \psi = m\hbar \psi \quad -l \leq m \leq l$$

notare: la “lunghezza” di  $\mathbf{L}$ ,  $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ , è sempre *maggiore* della grandezza di  $L_z$ ,  $m\hbar$ , a indicare che la conoscenza di una componente **non** determina  $\mathbf{L}$ .

# Momento angolare: autofunzioni.

Le autofunzioni del momento angolare hanno  $l$  intero e  $-l \leq m \leq l$

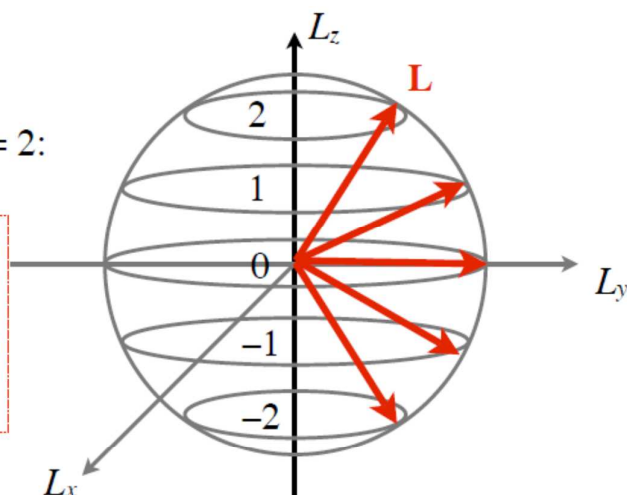
**Table 4.2:** The first few spherical harmonics,  $Y_l^m(\theta, \phi)$ .

$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$	$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta$	$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 1} = \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$
$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 3} = \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}$

Tabella da Griffiths,  
Introduction to  
Quantum Mechanics

Una possibile rappresentazione per  $l = 2$ :

Attenzione: l'analogia non va spinta oltre. In particolare il disegno dei vettori è fuorviante: se uno stato ha  $L_z$  determinato, allora  $L_x$  e  $L_y$  sono indeterminati perché non hanno autostati comuni con  $L_z$ .



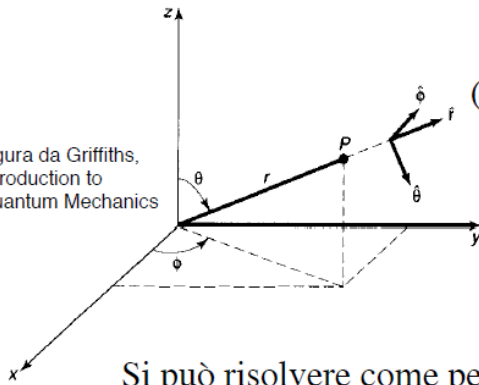
Le equazioni agli autovalori forniscono autovalori quantizzati:

$$L^2 \psi = l(l+1) \hbar^2 \psi \quad l \text{ intero o semiintero, intero per le armoniche sferiche}$$

$$L_z \psi = m \hbar \psi \quad -l \leq m \leq l$$

notare: la "lunghezza" di  $L$ ,  $\sqrt{l(l+1)} \hbar$ , è sempre *maggiore* della grandezza di  $L_z$ ,  $m \hbar$ , a indicare che la conoscenza di una componente **non** determina  $L$ .

Figura da Griffiths,  
Introduction to  
Quantum Mechanics



Sia  $V=V(r)$  un potenziale a simmetria sferica (dipendente solo dalla distanza da un punto -origine-).

L'equazione di Schrodinger si può scrivere in coordinate polari:

$$\frac{1}{2mr^2} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V(r)\psi = E\psi$$

Si può risolvere come per il momento angolare per separazione di variabili.

Gli stati stazionari (autofunzioni dell'Hamiltoniana) sono:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$$

dove le  $R(r)$  sono funzioni della sola  $r$ , e le  $Y_l^m(\theta, \phi)$  sono le armoniche sferiche.

$\hat{H}, \mathbf{L}^2, L_z$  sono simultaneamente misurabili.

$V(r)$  influenza esclusivamente la dipendenza radiale  $R(r)$ .

## Momento angolare: riassunto

Le componenti del momento angolare **non commutano**.

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x \end{aligned}$$

Non è possibile misurare simultaneamente due componenti di  $\mathbf{L}$ .

Il quadrato del momento angolare totale e una qualunque componente di  $\mathbf{L}$  **commutano**:

$$[L^2, L_{x,y,z}] = 0$$

È possibile misurare simultaneamente  $L^2$  e una componente di  $\mathbf{L}$ .

Le autofunzioni simultanee di  $\mathbf{L}^2$  e  $L_z$  sono le *armoniche sferiche*:  $Y_l^m(\theta, \phi)$

Con autovalori dati da:

$$\begin{aligned} L^2\psi &= l(l+1)\hbar^2\psi & l &= 0, 1, 2, \dots \\ L_z\psi &= m\hbar\psi & -l &\leq m \leq l \end{aligned}$$

Potenziale centrale  $V(r)$ : gli stati stazionari (autofunzioni dell'Hamiltoniana) sono:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$$

dove le  $R(r)$  sono funzioni della sola  $r$ , determinate da  $V(r)$

$\hat{H}, \mathbf{L}^2, L_z$  sono simultaneamente misurabili in un potenziale centrale.

E' possibile definire un operatore vettoriale come operatore momento angolare se valgono le relazioni di commutazione sopra descritte

Le conclusioni riguardo le proprietà degli autovalori dell'operatore momento angolare sono state ricavate utilizzando solo le relazioni di commutazione, senza specificare alcuna forma particolare degli operatori momento angolare

Sono quindi applicabili ad ogni operatore angolare

- Momento di spin elettronico:  $S^2, S_z$
- Momento di spin nucleare:  $I^2, I_z$
- Momento angolare di rotazione di una molecola:  $J^2, J_z$

### **Momento angolare di spin**

- momento angolare intrinseco di una particella
- proprietà quantistica, non ha un analogo classico
- spin dell'elettrone.
- momento angolare definito da un numero quantico  $s=1/2$
- due orientazioni possibili rispetto all'asse z caratterizzate da  $m_s=1/2$  e  $m_s=-1/2$

1922 Esperienza di O. Stern e W. Gerlach

1924 Principio di esclusione di Pauli

1925 G. Uhlenbeck e S. Goudsmith (proposero l'esistenza dello spin per interpretare gli spettri atomici)

1927 P.M.A. Dirac. Spin dalla soluzione dell'equazione di Schroedinger relativistica

Momento magnetico associato al momento angolare orbitale di un elettrone

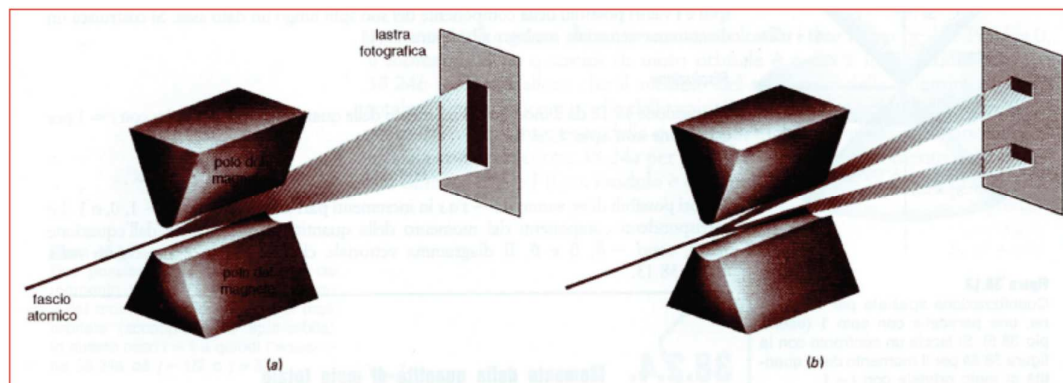
$$\vec{\mu}_l = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = -\frac{e}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} \hbar \vec{u}_l$$

$$\beta_e = \frac{e}{2m_e} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1} \quad \text{Magnetone di Bohr (Joule Tesla}^{-1}\text{)}$$

Momento magnetico associato al momento spin di un elettrone

$$\vec{\mu}_s = -g_e \frac{e}{2m_e} \sqrt{s(s+1)} \hbar \vec{u}_s \quad g_e \approx 2$$

Due possibili orientazioni rispetto ad un asse per il momento di spin



## Rotatore rigido

due masse  $m_1$  e  $m_2$  a distanza  $r_1$  e  $r_2$  dal centro di massa del sistema  
momento di inerzia,  $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

energia cinetica,  $E = \frac{I\omega^2}{2}$   $\omega$ , velocità angolare di rotazione

operatore hamiltoniano,  $H = \frac{1}{2I} L^2$

$$H Y(\vartheta, \varphi) = E_J Y(\vartheta, \varphi) : \quad \frac{1}{2I} L^2 Y(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2I} J(J+1) \hbar^2 Y(\vartheta, \varphi) :$$

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) :$$